ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 1996, том 34, № 1, с. 125 - 133

МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИЗМЕРЕНИЙ

УДК 536.25:517.95

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА В АВТОТИГЛЕ ПРИ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ГАРНИСАЖНОЙ ПЛАВКЕ

© 1996 г. А. А. Березовский, Ю. В. Жерновый, М. Т. Сайчук

Львовский государственный университет

Поступила в редакцию 07.02.95 г.

Предложена математическая модель стационарного теплового режима при электронно-лучевой гарнисажной плавке металлов, основанная на использовании теории теплопроводности. Вынужденный конвективный перенос тепла в жидкой ванне моделируется введением коэффициента эффективной теплопроводности, для которого учитывается зависимость от диаметра ванны при заданной средней по ванне скорости перемешивания расплава. Рассматриваются случаи кругового сканирования электронного луча по обогреваемой поверхности и осесимметричного нагрева неподвижным электронным лучом. Разработанный численно-аналитический метод решения стационарной задачи плавления позволяет вместе с температурным полем одновременно определять коэффициент эффективной теплопроводности, объем жидкой ванны и перегрев расплава. Исследуются зависимости параметров стационарного теплового режима плавки от радиуса кругового сканирования электронного луча, радиуса фокального пятна, средней по ванне скорости движения расплава, зависящей от интенсивности электромагнитного перемешивания. Дана оценка влияния температурной зависимости коэффициента теплопроводности в твердой фазе на температуру металла и объем жидкой ванны. Приводится сравнение результатов численных расчетов с известными экспериментальными данными.

Основным преимуществом электронно-лучевой гарнисажной плавки (ЭЛГП) по сравнению с другими методами рафинирования является наивысшая степень очистки металла от вредных примесей, неметаллических и газовых включений. Сущность процесса ЭЛГП заключается в выплавке сплава из кусковой или сыпучей шихты, загружаемой непосредственно в гарнисажную плавильную емкость (автотигель), и в дальнейшем в получении из него литых изделий.

При разработке технологии ЭЛГП необходима оценка ряда параметров, среди которых следует выделить непосредственно связанные с тепловыми процессами, протекающими в автотигле. Объем металлической ванны, перегрев расплава и температура обогреваемой поверхности металла определяются мощностью электронно-лучевого нагрева, траекторией сканирования электронного луча, интенсивностью электромагнитного перемешивания расплава и теплоотвода с охлаждаемых поверхностей автотигля. Экспериментальная оценка влияния каждого из указанных параметров на формирование металлической ванны связана с проведением большого количества опытных плавок и в ряде случаев весьма затруднительна. Поэтому применение математических методов, позволяющих учесть большинство факторов, влияющих на протекание процесса плавления [1 - 3], является важным этапом разработки промышленной технологии ЭЛГП. Однако многообразие и сложность процессов ЭЛГП в сочетании с недостаточной изученностью отдельных явлений приводят к необходимости раздельного исследования некоторых из них, и успех математического моделирования зависит от того, насколько удачно учтено влияние других процессов на изучаемый. В ряде работ [4] для описания физических явлений в зоне воздействия электронного луча вводят некоторый источник теплоты и используют теорию теплопроводности. Иногда такой подход дает возможность быстрее получить методику инженерных расчетов процесса, чем подробный анализ физических явлений.

Особенностью процесса ЭЛГП в режиме выдержки при заданной постоянной мощности нагрева является достижение стационарного распределения температуры метала в автотигле и стабилизации объема жидкой ванны, когда поступающая энергия электронно-лучевого нагрева полностью отводится с помощью системы охлаждения и тепловых потерь излучением и испарением с нагреваемой поверхности. Расчет стационарного теплового режима в автотигле позволяет определить те значения тепловых параметров (температуры металла, объема жидкой ванны и перегрева расплава), которые будут достигаться с течением времени при заданных значениях мощности электронно-лучевого нагрева и интенсивности электромагнитного перемешивания расплава (скорости движения расплава в ванне).

В данной работе предложена математическая модель стационарного теплового режима в автотигле, использующая подход [1 - 3], основанный на теории теплопроводности с введением для жидкой фазы коэффициента эффективной теплопроводности, описывающего вынужденный конвективный перенос тепла в расплаве. В отличие от [1 - 3] учитывается сканирование электронного луча по обогреваемой поверхности и зависимость коэффициента эффективной теплопроводности от диаметра жидкой ванны при заданной средней по ванне скорости движения расплава. Поскольку температура твердого металла в автотигле изменяется в широком диапазоне (от температуры, близкой к температуре воды в системе охлаждения, до температуры плавления), для твердой фазы рассматривается зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Разработанный метод решения стационарной задачи плавления является промежуточным между аналитическими и численными методами и позволяет вместе с температурным полем одновременно определять коэффициент эффективной теплопроводности, объем жидкой ванны и перегрев расплава.

Опишем рассматриваемый процесс и особенности построения математической модели. Автотигель имеет цилиндрическую форму, его боковая ($r = a$) и донная ($z = 0$) поверхности охлаждаются водой (днище может быть выполнено неводоохлаждаемым), а нагрев осуществляется сфокусированным электронным лучом, непрерывно сканирующим по поверхности металла $z = l$ по заданной программе (окружность, спираль, пересекающиеся строки и др.). Характер теплового источника при моделировании электронно-лучевого нагрева определяется величиной ускоряющего напряжения электронной пушки, влияющего на глубину пробега электронов в металле. Согласно [4], источник электронно-лучевого нагрева может считаться поверхностным, если ускоряющее напряжение не превышает 20 кВ. В большинстве случаев ЭЛГП проводится с использованием электронных пушек аксиального типа с ускоряющими напряжениями 40 - 50 кВ [5]. Поэтому в правой части уравнения переноса тепла предусмотрим наличие объемных тепловых источников, нормально распределенных по глубине нагреваемого металла. Максимум энерговыделения при этом будет находиться под поверхностью нагрева на некотором расстоянии h, зависящим от глубины пробега электронов в металле, которая, в свою очередь, определяется величиной ускоряющего напряжения [4]. Ограничимся рассмотрением такого диапазона значений удельной мощности в зоне воздействия электронного луча, при которых еще не происходит вскипания микрообъема расплава и взрывного испарения металла [4, 5].

Важным фактором, существенно влияющим на температурное поле и позволяющим увеличивать слив жидкого металла, одновременно уменьшая его перегрев, является воздействие системы электромагнитного перемешивания расплава, обусловливающее интенсивный теплообмен по всему объему ванны. Используем получившее широкое распространение [1 - 3, 6] предположение о том, что вынужденный конвективный перенос тепла в расплаве может быть описан с помощью коэффициента эффективной теплопроводности λ_E, значение которого больше коэффициента молекулярной теплопроводности λ_L в $\tilde{k}$ раз. Для нахождения значения $\tilde{k}$ воспользуемся формулой, полученной в результате экспериментальных исследований турбулентного переноса тепла для случая вынужденной конвекции [7, 8]

$$\tilde{k} = \begin{cases} 0.45\,(\mathrm{PrRe})^{0.438} & \text{при } \mathrm{PrRe} \le 8600 \\ 1.35\times 10^{-6}\,(\mathrm{PrRe})^{1.84} & \text{при } \mathrm{PrRe} > 8600. \end{cases}$$

Учитывая, что $\mathrm{PrRe} = vdC_{VL}/\lambda_L$, видим, что величина $\tilde{k}$ зависит от теплоемкости единицы объема жидкого металла C_{VL}, средней по ванне скорости движения расплава v и среднего диаметра ванны d.

Используем предложенную в ряде работ [1, 6, 9] математическую постановку задачи теплопроводности с фазовым переходом, основанную на описании процессов переноса тепла в жидкой и твердой фазах с помощью одного уравнения энергии. Тогда в случае сканирования электронного луча по окружности с центром, находящимся на оси автотигля, или просто осесимметричного нагрева неподвижным электронным лучом, развитие во времени нестационарного температурного поля с изотермой плавления стремится к решению $T(r, z)$, $r = R(z)$ следующей осесимметричной стационарной задачи Стефана:

$$\begin{gathered} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \\ = -Q(r)\exp\left[-k_z(l-h-z)^2\right], \\ 0 < r < a, \quad 0 < z < l, \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \\ \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_1 T = \alpha_1 T_W, \quad r = a, \\ \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z} - \alpha_2 T = -\alpha_2 T_W, \quad z = 0, \\ \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z} = -f(T), \quad z = l, \end{gathered} \tag{1}$$

$$T = T_m, \quad r = R(z),$$

$$\lambda_E \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{r=R(z)-0} = \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{r=R(z)+0}.$$

Здесь $Q(r)$ – стационарное распределение плотности объемной мощности на поверхности максимального энерговыделения; k_z – коэффициент сосредоточенности источника тепла по осевой координате; T_w – температура воды в системе охлаждения; линейные граничные условия при $r = a$ и $z = 0$ описывают теплоотвод по закону Ньютона с охлаждаемых поверхностей автотигля с коэффициентами теплоотдачи α_1, α_2, а нелинейное граничное условие при $z = l$ – тепловые потери за счет излучения и испарения с нагреваемой поверхности, причем $f(T) = \varepsilon\sigma T^4 + \eta(T - T_m)Q_E(T)$, ε – степень черноты метала, σ – постоянная Стефана–Больцмана, $\eta(T - T_m)$ – функция Хевисайда, T_m – температура плавления. Последние условия в (1) выражают равенство температуры на границе раздела фаз $r = R(z)$ температуре плавления T_m и равенство тепловых потоков со стороны жидкой и твердой фаз в стационарном состоянии системы.

Функцию $Q_E(T)$, определяющую плотность теплового потока испарения, представим в виде $Q_E(T) = c_1\exp(-c_2/T)$, где постоянные c_1, c_2 могут быть найдены как по данным экспериментальных исследований, так и с помощью закона Клайперона–Клаузиуса, записанного для тонкого газового слоя, примыкающего к поверхности испарения [10, 11] : $c_1 = v_*\rho_L L_E$, $c_2 = AL_E/R_*$, где v_* – величина, близкая к скорости звука в металле, ρ_L – плотность жидкого металла, A – атомный вес, R_* – универсальная газовая постоянная, L_E – удельная теплота испарения.

Очевидно, что задача (1) не может быть решена с помощью прямых разностных методов [12, с. 312], поскольку неизвестны положение границы раздела фаз и значение коэффициента λ_E. Применение же метода установления [12] требует решения соответствующей нестационарной задачи Стефана, что слишком трудоемко. Поэтому, как предложено в [1, 2], сведем задачу (1) к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению Гаммерштейна. Для этого после замены $u = T - T_w$ применим преобразование Кирхгофа

$$\psi = \int_0^u \lambda(s)ds,$$

аппроксимируя зависимость коэффициента теплопроводности от температуры кусочно-постоянной функцией

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_i, & T_{i-1} \le T < T_i, \quad i = \overline{1, K}; \\ & T_K = T_m, \quad T_0 = T_w \\ \lambda_E = \tilde{k}\lambda_L, & T > T_m. \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, связь между u, T и ψ определяется соотношениями

$$\begin{gathered} u(\psi) = u_1[\eta(\psi) - \eta(\psi - \psi_1)] + \\ + \sum_{i=1}^{K-1}[u_i + (\psi - \psi_i)/\lambda_{i+1}][\eta(\psi - \psi_i) - \\ - \eta(\psi - \psi_{i+1})] + [u_m + (\psi - \psi_m)/\lambda_E]\eta(\psi - \psi_m), \\ T(\psi) = T_w + u(\psi), \quad u_i = T_i - T_w, \\ i = \overline{1, K-1}, \quad u_K = u_m = T_m - T_w, \\ \psi_1 = \lambda_1 u_1, \quad \psi_i = \psi_{i-1} + \lambda_i(u_i - u_{i-1}), \\ i = \overline{2, K-1}, \quad \psi_K = \psi_m = \psi_{K-1} + \lambda_K(u_m - u_{K-1}), \end{gathered} \tag{3}$$

благодаря чему условие равенства тепловых потоков на границе раздела фаз в (1) выполняется автоматически.

Исключая $T(r, z)$, из (1) получим более простую краевую задачу для новой искомой функции $\psi(r, z)$

$$\begin{gathered} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -Q(r)\exp\left[-k_z(l - h - z)^2\right], \\ 0 < r < a, \quad 0 < z < l, \\ \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} + h_1\psi = 0, \quad r = a, \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} - h_2\psi = 0, \quad z = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = -f(T(\psi)), \\ z = l \quad (h_i = \alpha_i/\lambda_{Si}) \end{gathered} \tag{4}$$

и условие для определения поверхности раздела фаз $r = R(z)$

$$\psi(R(z), z) = \psi_m, \tag{5}$$

где λ_{Si} – средние значения λ на охлаждаемых поверхностях. С помощью соответствующей функции Грина $G(\rho, \zeta; r, z)$ решение краевой задачи (4) сводится к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна относительно функции $\varphi(r) = \psi(r, l)$ [1]. Для нахождения его приближенного решения аппроксимируем $\varphi(r)$ кусочно-постоянной функцией, обозначив через φ_i среднеинтегральное значение $\varphi(r)$ на интервале (r_{i-1}, r_i), где $r_i = ia/M$ – точки разбиения отрезка $[0, a]$ на M частей. После применения зонального метода (простейшего из проекционных методов [13]) для определения φ_j, $j = \overline{1, M}$ получим систему нелинейных уравнений

$$\varphi_j = \varphi_{\Lambda j} - \sum_{i=1}^{M} G_{ij} f(T(\varphi_i)), \quad j = \overline{1, M}, \tag{6}$$

где постоянные $\varphi_{\Lambda j}$, G_{ij} находятся интегрированием известных функций.

После определения φ_j, $j = \overline{1, M}$ сможем представить распределение модифицированной температуры в виде ряда

$$\psi(r, z) = \frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) J_0(\gamma_n r), \tag{7}$$

где

$$A_n(z) = -\sum_{i=1}^{M} f(T(\varphi_i)) A_{ni} g_n(z) +$$

$$+ (\pi/k_z)^{1/2}\gamma_n G_n(z)\int_0^a rQ(r)J_0(\gamma_n r)dr/(4P_n),$$

$$A_{ni} = [r_i J_1(\gamma_n r_i) - r_{i-1}J_1(\gamma_n r_{i-1})]/P_n,$$

$$P_n = (\gamma_n^2 + h_1^2)\,[\gamma_n + h_2 - (\gamma_n - h_2)\times$$

$$\times \exp(-2\gamma_n l)\,]\,J_0^2(\gamma_n a),$$

$$g_n(z) = (\gamma_n + h_2)\exp(-\gamma_n(l - z)) +$$

$$+ (\gamma_n - h_2)\exp(-\gamma_n(l + z)),$$

$$G_n(z) = [1 + \exp(-2\gamma_n(l - z))]\,((\gamma_n + h_2)\times$$

$$\times [\mathrm{erf}((\gamma_n + 2k_z(l - h))\,k_z^{-1/2}/2) -$$

$$- \mathrm{erf}((\gamma_n + 2k_z(l - h - z))\,k_z^{-1/2}/2)\,] +$$

$$+ (\gamma_n - h_2)\exp(-2\gamma_n(l - h))\times$$

$$\times [\mathrm{erf}\,((\gamma_n - 2k_z(l - h - z))\,k_z^{-1/2}/2) -$$

$$- \mathrm{erf}((\gamma_n - 2k_z(l - h))\,k_z^{-1/2}/2)\,]\,\}\times$$

$$\times \exp[(\gamma_n^2 + 4k_z\gamma_n(l - h - z))\,k_z^{-1}/4\,] +$$

$$+ [\gamma_n + h_2 + (\gamma_n - h_2)\exp(-2\gamma_n z)]\times$$

$$\times \{\mathrm{erf}\,((\gamma_n + 2k_z h)\,k_z^{-1/2}/2) -$$

$$- \mathrm{erf}((\gamma_n - 2k_z(l - h - z))\,k_z^{-1/2}/2) +$$

$$+ \exp(-2\gamma_n h)\,[\mathrm{erf}\,((\gamma_n + 2k_z(l - h - z))\,k_z^{-1/2}/2) -$$

$$- \mathrm{erf}((\gamma_n - 2k_z h)\,k_z^{-1/2}/2)\,\}\times$$

$$\times \exp[(\gamma_n^2 - 4k_z\gamma_n(l - h - z))\,k_z^{-1}/4];$$

$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$ – корни уравнения $h_1 J_0(\gamma a) - \gamma J_1(\gamma a) = 0$; J_0 и J_1 – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка.

Однако решение системы (6) невозможно без нахождения постоянной $\tilde{k}$, которая использовалась в (3) при определении связи между функциями T и ψ. Если записать формулу для $\tilde{k}$ в виде

$$\tilde{k} = \begin{cases} 0.45\,(2vC_{VL}r_*/\lambda_L)^{0.438} & \text{при } \mathrm{PrRe} \le 8600 \\ 1.35\times 10^{-6}\,(2vC_{VL}r_*/\lambda_L)^{1.84} & \\ \text{при } \mathrm{PrRe} > 8600, & \end{cases}$$

то при заданном значении средней скорости движения расплава v определение $\tilde{k}$ сводится к нахождению среднеинтегрального значения радиуса ванны

$$r_* = \int_{z_0}^{l} R(z)dz/(l - z_0) \tag{8}$$

по ее глубине $H = l - z_0$, также подлежащей определению. Очевидно, что для каждого значения $r_* \in (0, a)$ можно решить систему (6), а затем с помощью уравнения (5), рассматриваемого для последовательности дискретных значений z_i, найти последовательность соответствующих значений функции $r_i = R(z_i)$, по которым вычислить правую часть равенства (8). Итак, соотношение (8) можно переписать в виде

$$r_* = \mathcal{F}(r_*), \tag{9}$$

где $\mathcal{F}(r_*)$ – функция, которая каждому $r_* \in (0, a)$ ставит в соответствие результат вычисления правой части (8), полученный описанным выше способом. Таким образом, определение среднеинтегрального значения радиуса ванны r_* фактически сводится к численному решению функционального уравнения (9) одним из итерационных методов (например, методом секущих). Эффективным методом решения системы нелинейных уравнений (6) является метод Ньютона.

После решения уравнения (9) можно определить искомое стационарное температурное поле $T(r, z)$ по формулам (7) и (3), а из условия (5) – расположение границы раздела фаз $r = R(z)$. Объем жидкой ванны и среднеинтегральный перегрев расплава по всему объему ванны вычислим по формулам

$$W = \pi\int_{z_0}^{l} R^2(z)dz,$$

$$\Delta T = \frac{2\pi}{W}\int_{z_0}^{l}\int_0^{R(z)} T(r, z)rdrdz - T_m.$$

Определим $Q(r)$ – стационарное распределение плотности объемной мощности на поверхности $z = l - h$ в случае сканирования электронного луча по окружности радиуса $0 < R < a$. Пусть O_1 – точка фокусировки электронного луча, расположенная в плоскости $z = l - h$ на расстоянии $|OO_1| = R$

от точки O, лежащей в той же плоскости на оси автотигля. Рассмотрим точку $M(\beta)$, расположенную на расстоянии r от точки O и на расстоянии $y(\beta)$ от точки O_1, где $\beta \le O_1OM(\beta)$. Значение плотности объемной мощности в точке $M(\beta)$ равно $Q_0\exp[-k_r y^2(\beta)]$, где $y^2(\beta) = R^2 + r^2 - 2rR\cos\beta$, $0 \le \beta \le \pi$ (из теоремы косинусов); Q_0 – значение плотности объемной мощности в точке O_1; k_r – коэффициент сосредоточенности источника тепла в радиальном направлении. Плотность энергии, поглощаемой в каждой точке, находящейся на расстоянии r от точки O, за время прохождения электронным лучом одной полной окружности радиуса R (за период вращения $T_{sc} = 2\pi R/v_{sc}$, где v_{sc} – скорость сканирования) определяется интегралом

$$E(r) = 2Q_0 \int_0^{T_{sc}/2} \exp\{-k_r[r^2 + R^2 - 2Rr\cos(v_{sc}t/R)]\}\,dt = \frac{2RQ_0}{v_{sc}}\exp[-k_r(r^2+R^2)] \times \int_0^{\pi}\exp(2k_r rR\cos\beta)\,d\beta.$$

В качестве $Q(r)$ примем среднее значение плотности поглощаемой энергии за единицу времени

$$Q(r) = \frac{E(r)}{T_{sc}} = \frac{Q_0}{\pi}\exp[-k_r(r^2+R^2)] \times \int_0^{\pi}\exp(2k_r rR\cos\beta)\,d\beta. \quad (10)$$

Для определения значения Q_0 воспользуемся равенством, описывающим энергетический баланс при поглощении металлом мощности P

$$P = 2\pi Q_0 \int_0^{\infty}\exp(-k_r r^2)\,r\,dr \int_{-\infty}^{l}\exp[-k_z(l-h-z)^2]\,dz,$$

откуда $Q_0 = 2Pk_r k_z^{1/2}\pi^{-3/2}/[1+\mathrm{erf}(k_z^{1/2}h)]$.

Для иллюстрации разработанной математической модели были проведены расчеты стационарных тепловых режимов при ЭЛГП ниобия в автотигле диаметром 280 мм (a = 0.14 м) при уровне металла в тигле l = 0.14 м и мощности электронного луча P_0 = 190 кВт. К. п. д. электронно-лучевого нагрева согласно [5] составляет $\eta = 0.7$, поэтому значение мощности, поглощаемой металлом, принято равным $P = \eta P_0$ = 133 кВт. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры определена в виде (2) с использованием данных о теплопроводности ниобия [14]: $T_0 = T_w$ = 300 K; T_1 = 400 K; T_2 = 500 K; T_3 = 600 K; T_4 = 800 K; T_5 = 1400 K; T_6 = 1800 K; T_7 = 2000 K; T_8 = 2400 K; $T_9 = T_m$ = 2740 K; λ_1 = 54.45; λ_2 = 55.95; λ_3 = 57.45; λ_4 = 59.755; λ_5 = 62.05; λ_6 = 65.378; λ_7 = 69.344; λ_8 = 73.122; λ_9 = 77.636; λ_L = 56.2716 Вт/(м К). При расчетах принималось: $\lambda_{S1} = \lambda_{S2}$ = 63.39 Вт/(м К); $\alpha_1 = \alpha_2$ = 400 Вт/(м^2 К); $C_{VL} = 0.2772 \times 10^7$ Дж/(м^3 К); $\varepsilon = 0.4$; $\sigma = 0.567 \times 10^{-7}$; $c_1 = 0.31102 \times 10^{18}$; c_2 = 93868.526 (значения c_1 и c_2 получены с использованием экспериментальных данных, приведенных в [1]).

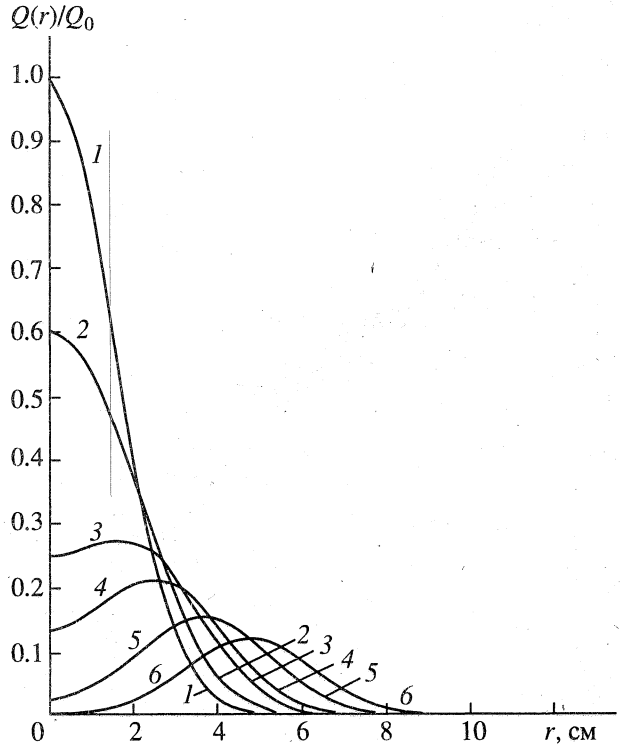

Рис. 1. Распределение относительной плотности мощности электронного луча по нагреваемой поверхности металла для различных значений радиуса кругового сканирования: *1* – $R = 0$ (нагрев без сканирования), *2* – R = 0.015 м, *3* – R = 0.025 м, *4* – R = 0.03 м, *5* – R = 0.04 м, *6* – R = 0.05 м.

Коэффициенты сосредоточенности вычислялись по формулам: $k_r = 2b^{-2}$; $k_z = 4b_z^{-2}$, где b – радиус фокального пятна (электронного луча), $b_z = 0.25h$ – ширина зоны максимального энерговыделения [4]. При этом глубина максимального энерговыделения равна $h = 0.75\delta$, а глубина проникновения электронов δ определялась по формуле Шонланда [4]. Расчеты проводились для ускоряющего напряжения U = 50 кВ, т.е. при $\delta = 0.763 \times 10^{-5}$ м.

Рассматривался осесимметричный нагрев металла неподвижным ($R = 0$) или сканирующим электронным лучом по окружности радиуса $0 < R < a$, когда стационарное распределение плотности объемной мощности $Q(r)$ по поверхности максимального энерговыделения определялось в виде (10). На рис. 1 представлены зависимости $Q(r)/Q_0$ при

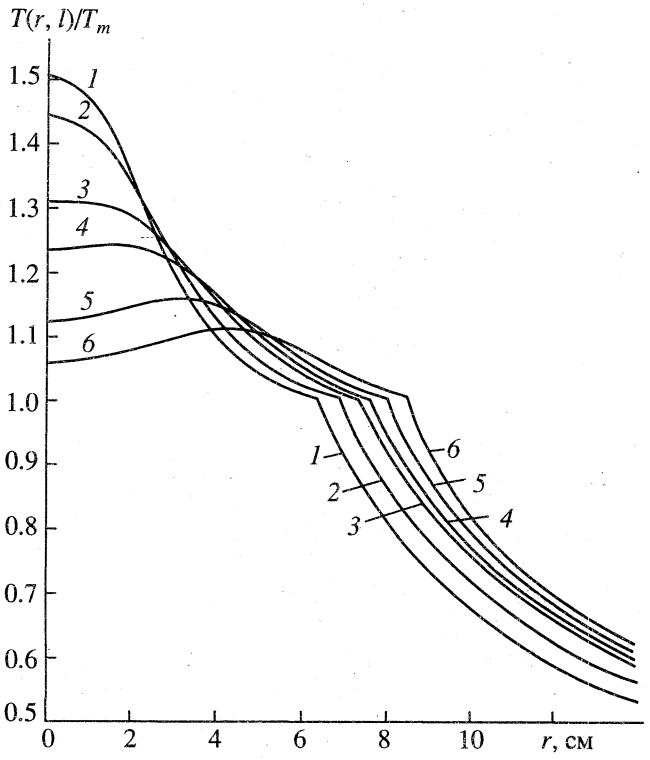

Рис. 2. Распределение безразмерной температуры ниобия по нагреваемой поверхности при b = 0.03 м; v = 0.3 м/с для различных значений радиуса кругового сканирования: *1* – R = 0; *2* – R = 0.015; *3* – R = 0.025; *4* – R = 0.03; *5* – R = 0.04; *6* – R = 0.05 м.

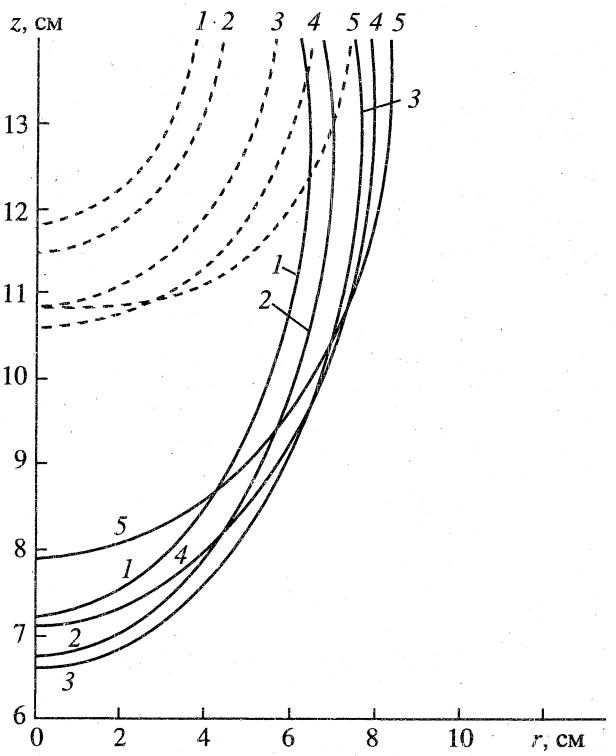

Рис. 3. Сечения поверхностей раздела жидкой и твердой фаз $r = R(z)$, полученные для ниобия для случаев v = 0.3 м/с (сплошные линии) и v = 0.005 м/с (штриховые линии) при b = 0.03 м и различных значениях радиуса сканирования: *1* – R = 0; *2* – R = 0.015; *3* – R = 0.03; *4* – R = 0.04; *5* – R = 0.05 м.

b = 0.03 м для различных значений радиуса сканирования R. Исследование функции $Q(r)$ на экстремум показывает, что точка $r = r_0$, в которой $Q(r)$ принимает максимальное значение, определяется из уравнения

$$\int_0^{\pi} (R\cos\beta - r)\exp(2k_r rR\cos\beta)d\beta = 0,$$

из вида которого следует, что $0 \le r_0 < R$. Полученное неравенство подтверждается видом кривых на рис. 1: при $R = 0$ и $R = 0.015$ м точка достижения максимума $r_0 = 0$, а при дальнейшем увеличении R точки максимума расположены несколько левее от прямой $r = R$. Максимальное значение $Q(r_0)$ уменьшается с возрастанием R, как и величина $Q(0)$, которая близка к нулю при $R = 0.05$ м.

Для тех же значений b и R на рис. 2 изображены кривые $T(r, l)/T_m$, описывающие соответствующие распределения температуры металла по нагреваемой поверхности в условиях плавки с использованием электромагнитного перемешивания (ЭМП). При проведении расчетов здесь принято v = 0.3 м/с, поскольку в реально работающих тиглях с системой ЭМП скорость перемешивания металла близка именно к этому значению [5]. При этом для значений радиуса сканирования в пределах от 0 до 5 см значения $\tilde{k}$, определяемые в процессе решения задачи, изменяются от 11.27 до 12.57, т.е. близки к значению $\tilde{k}$ = 10, которое использовалось в [5]. Ход температурных кривых $T(r, l)$ при различных значениях R воспроизводит поведение соответствующих зависимостей $Q(r)$, но первые более сжаты по вертикали при малых r, т.е. значения $T(0, l)$ отличаются меньше при различных R по сравнению с величинами $Q(0)$. Этот результат можно объяснить как следствие тепловых потерь излучением и испарением с нагреваемой поверхности, резко возрастающих с увеличением температуры. Точки достижения максимальной температуры удаляются от центральной точки $r = 0$ поверхности $z = l$ с увеличением R, при этом величина $T(0, l)$ убывает, приближаясь к значению температуры плавления T_m, поэтому при $R > 0.05$ м в окрестности точки $r = 0$, $z = l$ возможно наличие зоны нерасплавленного металла. Увеличение радиуса сканирования приводит к более равномерному распределению плотности поглощаемой энергии по поверхности нагрева и, следовательно, к уменьшению градиента температуры на поверхности расплава, а также, естественно, к увеличению диаметра жидкой ванны на поверхности $z = l$ и температуры на нерасплавленной части

поверхности. Кривые температуры имеют точку излома при переходе через значение, равное температуре плавления металла, что обусловлено различием коэффициентов теплопроводности расплава и твердого металла.

Для определения погрешности приближенного решения нелинейной краевой задачи (4) вычислялось значение суммарных потерь энергии с поверхностей $z = l$, $z = 0$ и $r = a$, которое для точного решения рассматриваемой стационарной задачи должно совпадать со значением мощности P, поглощаемой металлом. Результаты расчетов с использованием данных ниобия для приведенных выше значений параметров и для $b = 0.03$ м показывают, что погрешность при определении температуры на поверхностях $z = l$, $z = 0$ и $r = a$, вычисляемая по отношению к значению поглощаемой мощности, составляет от 1.36% при $R = 0$ до 0.165% при $R = 0.03$ м.

На рис. 3 представлены сечения поверхностей раздела жидкой и твердой фаз $r = R(z)$, полученные при $b = 0.03$ м и различных значениях радиуса сканирования R, для случаев использования системы ЭМП ($v = 0.3$ м/с, сплошные линии) и без принудительного перемешивания расплава ($v = 0.005$ м/с, штриховые линии). В последнем случае при изменении радиуса сканирования от нуля до значения $R = 0.05$ м величина $\tilde{k}$ изменяется в пределах от 1.44 до 2.00. Глубина ванны увеличивается с возрастанием R, достигая максимума в окрестности значения $R = 0.03$ м при плавке с ЭМП и при $R = 0.04$ м в случае плавки без ЭМП, а при дальнейшем увеличении радиуса сканирования – уменьшается, причем значительнее в случае использования ЭМП. Использование ЭМП приводит к увеличению максимального значения глубины ванны более чем в 2 раза, в то же время максимальное значение радиуса ванны на нагреваемой поверхности увеличивается только на 10 мм. Отметим, что при использовании ЭМП жидкая ванна имеет наибольший диаметр не на поверхности $z = l$, а несколько ниже – на глубине от нескольких миллиметров до сантиметра с небольшим (глубина уменьшается с возрастанием R). Таким образом, поверхность раздела фаз имеет небольшой изгиб в сторону оси $r = 0$, придавая ванне эллипсоидальную форму, наблюдаемую на практике. Наличие такого изгиба объясняется превышением тепловых потерь над значениями плотности энергии, поглощаемой в точках пересечения поверхности изотермы плавления с поверхностью металла $z = l$, в результате чего производная от температуры по осевой координате z вблизи поверхности $z = l$ отрицательна. Отсутствие изгиба при плавке без принудительного перемешивания обусловлено тем, что в этом случае в точках окружности $r = R(l)$ (изотермы плавления на поверхности $z = l$) величина плотности поглощаемой энергии превосходит тепловые потери.

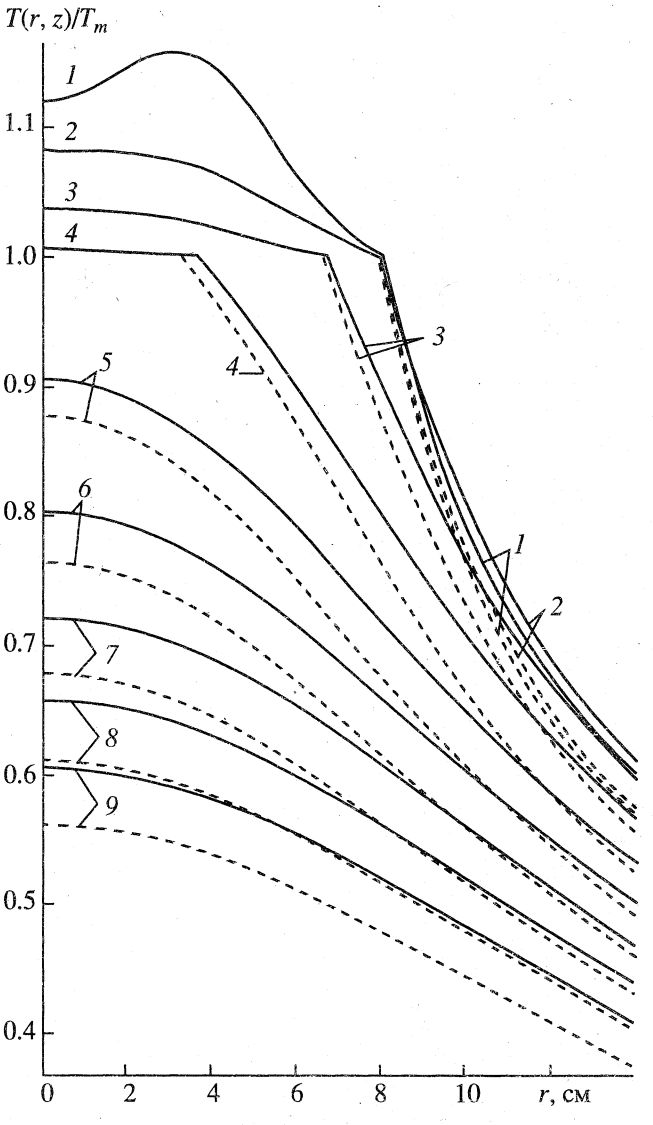

Рис. 4. Зависимости безразмерной температуры ниобия от радиальной координаты r для различных значений осевой координаты z, полученные при $b = 0.03$ м; $R = 0.04$ м; $v = 0.3$ м/с для случаев учета зависимости коэффициента теплопроводности твердого металла от температуры $\lambda = \lambda(T)$ (сплошные линии) и $\lambda = \bar{\lambda} = 68.5$ Вт/(м К) (штриховые линии): *1* – $z = l = 14$; *2* – $z = 11.93$; *3* – $z = 9.86$; *4* – $z = 7.80$; *5* – $z = 6.0$; *6* – $z = 4.5$; *7* – $z = 3.0$; *8* – $z = 1.5$; *9* – $z = 0$ см.

На рис. 4 представлены зависимости безразмерной температуры металла $T(r, z)/T_m$ от радиальной координаты r при различных значениях осевой координаты z для случая $b = 0.03$ м; $R = 0.04$ м; $v = 0.3$ м/с. Здесь штриховые кривые соответствуют температурам, полученным без учета зависимости коэффициента теплопроводности от температуры в твердой фазе. При рассматриваемых значениях входных параметров плавки среднее значение $\lambda = \bar{\lambda}$ в твердой фазе для ниобия составляет около 68.5 Вт/(м К). Анализ результатов, представленных на рис. 4, позволяет заключить,

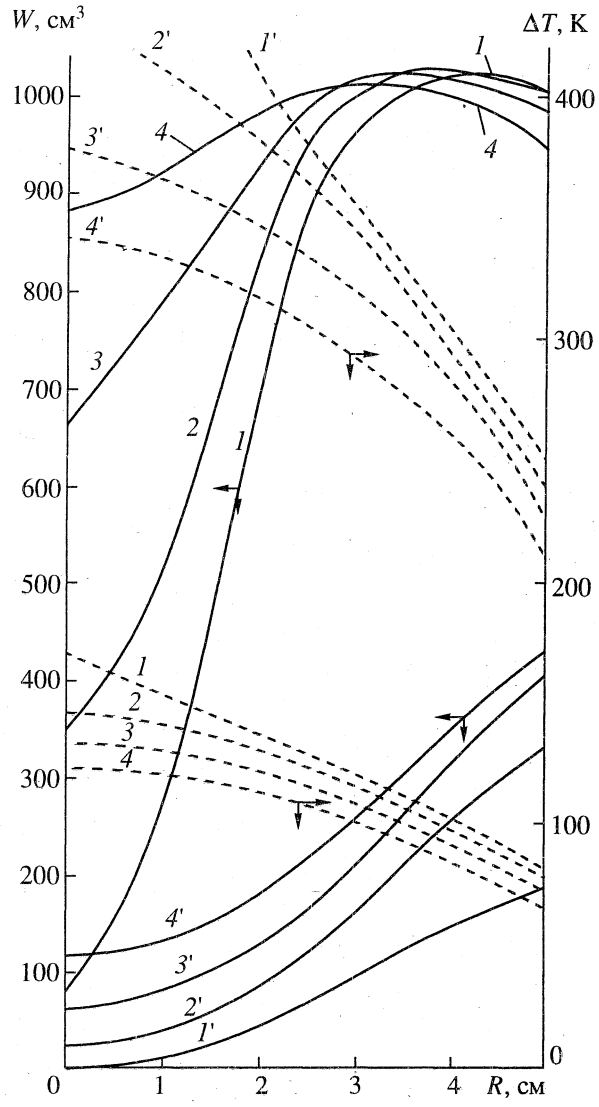

Рис. 5. Зависимости объема жидкой ванны ниобия (сплошные линии) и среднеинтегрального перегрева расплава (штриховые линии) от радиуса кругового сканирования, полученные для случаев v = 0.3 м/с (нумерация *1* - *4*) и v = 0.005 м/с (нумерация *1'* - *4'*) при различных значениях радиуса фокального пятна: *1*, *1'* – b = 0.01; *2*, *2'* – b = 0.02; *3*, *3'* – b = 0.03; *4*, *4'* – b = 0.04 м.

что учет зависимости λ от температуры почти не влияет на температуру расплава, повышая ее всего на 1 - 4 K, в то же время температура твердого металла увеличивается на 80 - 130 K, а объем жидкой ванны – на 3.4%. Погрешность, допускаемая в случае вычисления температуры твердого металла без учета зависимости λ от T, увеличивается при продвижении по координате z в направлении дна автотигля, а также при смещении по r в сторону боковой поверхности для значений z > 4.5 см и уменьшается при возрастании r – для z < 4.5 см. Максимальное значение абсолютной погрешности достигается вблизи дна автотигля в окрестности точки r = 0, z = 1.5 см, причем погрешность уменьшается на несколько градусов при дальнейшем продвижении к донной поверхности. Относительная погрешность на дне составляет 7.5 - 8.35%, а на охлаждаемой боковой поверхности – 5.6 - 8.35%. Температура на поверхности жидкой ванны имеет явно выраженный максимум в точке r = 3.2 см, который при продвижении в глубь металла перемещается в направлении уменьшения координаты r, достигая оси автотигля (r = 0) на расстоянии ~2 см от поверхности $z = l$, так что при z < 12 см температура становится монотонно убывающей функцией r. Градиент температуры в радиальном направлении убывает при удалении от поверхности нагрева.

На рис. 5 приведены зависимости объема жидкой ванны W (сплошные линии) и среднеинтегрального перегрева расплава ΔT по всему объему ванны (штриховые линии) от радиуса сканирования R, полученные при различных значениях радиуса фокального пятна b для случаев v = 0.3 м/с (когда применяется ЭМП) и v = 0.005 м/с (принудительное перемешивание отсутствует). Полученные результаты показывают, что с увеличением радиуса сканирования объем ванны возрастает, а перегрев уменьшается, что вполне объяснимо в связи с более равномерным распределением поглощаемой энергии по поверхности нагрева при увеличении R. Однако в случае плавки с ЭМП чрезмерное увеличение радиуса сканирования приводит к падению объема и при каждом b зависимость $W(R)$ имеет точку достижения максимума: b = 1 см – R = 4.35 см, b = 2 см – R = 3.85 см, b = = 3 см – R = 3.5 см, b = 4 см – R = 3.25 см (очевидно, при таких соотношениях R и b обеспечивается оптимально равномерное распределение плотности мощности по нагреваемой поверхности). Максимальные значения W при разных b мало отличаются друг от друга, но все же наибольшее значение объема достигается при b = 2 см. Сопоставление кривых $W(R)$, полученных при v = 0.005 м/с и v = 0.3 м/с, показывает, что применение ЭМП позволяет увеличить объем при R = 0 в 7.5 - 20 раз (в зависимости от значения b), а, например, при R = 5 см – в 2.8 - 3.5 раза. Применяя круговое сканирование электронного луча, объем жидкой ванны может быть увеличен (по сравнению с осесимметричным нагревом неподвижным лучом) при b = 1 см – в 12 раз; b = 2 см – в 2 раза; b = 3 см – приблизительно в 1.5 раза; b = 4 см – на 15%. С увеличением радиуса фокального пятна обеспечивается более равномерное распределение плотности поглощаемой мощности по нагреваемой поверхности, что приводит к значительному увеличению объема для малых R, а также к уменьшению перегрева расплава.

Анализируя результаты расчетов, проведенных при b = R = 0.03 м и различных значениях поглощаемой мощности электронно-лучевого нагрева (от P = 52.5 до P = 133 кВт), приходим к выводу, что при увеличении мощности нагрева

возрастает не только объем жидкой ванны, а и значение $\tilde{k}$, т.е. величина коэффициента эффективной теплопроводности жидкого металла. Действие системы ЭМП при достижении скорости перемешивания $v = 0.3$ м/с приводит к увеличению объема жидкой ванны по сравнению с плавкой без принудительного перемешивания в 1.66 - 4.84 раза (в зависимости от значения мощности P) и к уменьшению перегрева соответственно в 3.32 - 2.93 раза; при этом коэффициент $\tilde{k}$ достигает значений от 9 до 12.

Для проверки соответствия разработанной математической модели и получаемых с ее помощью результатов реальным тепловым режимам ЭЛГП проведено сравнение результатов расчетов с известными экспериментальными данными [5]. При экспериментальной плавке ниобия в гарнисажном тигле диаметром 280 мм с использованием ЭМП при максимальной мощности электронного луча $P_0 = 190$ кВт масса сливаемого жидкого металла колебалась от 8.4 до 8.7 кг, что в пересчете на объем составляет от 976.7 до 1011.6 см^3. Эту полосу значений пересекают все кривые $W(R)$, показанные на рис. 5, при значениях радиуса сканирования от 3 до 5 см.

По данным [5] при ЭЛГП без принудительного перемешивания глубина ванны циркония в тигле диаметром 250 мм составляет 24 - 28 мм. Согласно нашим расчетам, проведенным для циркония при $a = 0.125$ м, $l = 0.1$ м, $\alpha_1 = 400$ Вт/(м^2 К), $\alpha_2 = 50$ Вт/(м^2 К), $v = 0.005$ м/с, $b = 0.03$ м, $R = 0.35$ м и значениях $\lambda = \bar{\lambda}$ и C_{VL} из [5], глубина ванны колеблется от 20 до 27.2 мм при изменении поглощаемой мощности от значения $P = 52.5$ кВт до $P = 105$ кВт.

Далее, в [5] получены экспериментальные результаты для плавки циркония в тигле диаметром 215 мм при максимальной мощности $P_0 = 102$ кВт ($P = 0.7P_0 = 71.4$ кВт). Днище тигля было выполнено неводоохлаждаемым. Слив расплава циркония при плавке с ЭМП составлял 10.7 кг (1648.7 см^3), а без ЭМП – 3.1 кг (477.8 см^3). Для сравнения нами были проведены расчеты при следующих значениях основных параметров: 1) $a = 0.1075$ м, $l = 0.1$ м, $b = 0.03$ м, $P = 71.4$ кВт, $\alpha_1 = 400$ Вт/(м^2 К), $\alpha_2 = 50$ Вт/(м^2 К), $v = 0.3$ м/с, $3 \le R \le 6$ см; 2) $a = 0.1075$ м, $l = 0.05$ м, $b = 0.03$ м, $P = 71.4$ кВт, $\alpha_1 = 400$ Вт/(м^2 К), $\alpha_2 = 50$ Вт/(м^2 К), $v = 0.005$ м/с, $3 \le R \le 5.25$ см. В случае 1) объем жидкой ванны изменялся в пределах от 919 до 1633 см^3; а во втором – от 206 до 464 см^3.

В [15] установлено, что при скорости перемешивания в жидкой ванне $v = 1$ м/с перегрев расплава над температурой плавления не превышает 100 К. Этот результат хорошо согласуется с полученными нами с помощью численных расчетов значениями максимальной температуры на поверхности жидкой ванны. Для ниобия при $a = l = 0.14$ м, $b = 0.03$ м, $P = 133$ кВт, $R = 0.065$ м максимальный перегрев составляет ~101 - 102 К, а при меньшем радиусе сканирования $R = 0.05$ м достигает 186 К. Для циркония при $a = 0.1075$ м, $l = 0.11$ м, $b = 0.03$ м, $P = 71.4$ кВт максимальный перегрев изменяется от значения 134 К при $R = 0.045$ м до 95 К при $R = 0.055$ м.

Таким образом, полученные расчетным путем результаты находят вполне удовлетворительное экспериментальное подтверждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березовский А.А, Довбня В.Д.* Нелинейные краевые задачи. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. С. 41.
2. *Андреева Т.А., Березовский А.А., Довбня В.Д.* Математические модели энергетики. Киев: Наукова думка, 1988. С. 106.
3. *Berezovsky A.A., Dovbnia V.D., Zhernovyi Yu.V. et al.* Ukrainianfrench Symposium "Condensed Matter: Science and Industry", Lviv, 20 - 27 February 1993. Abstracts, information and participants. P. 133.
4. *Рыкалин Н.Н., Зуев И.В., Углов А.А.* Основы электронно-лучевой обработки материалов. М.: Машиностроение, 1978.
5. *Ладохин С.В., Корнюшин Ю.В.* Электронно-лучевая гарнисажная плавка металлов и сплавов. Киев: Наукова думка, 1988.
6. Тепловые процессы при электрошлаковом переплаве / Под ред. Медовара Б.И. Киев: Наукова думка, 1978.
7. *Кабаков З.К., Килимник И.А., Самойлович Ю.А.* Математическое моделирование тепловых процессов в затвердевающем слитке при перемешивании жидкой сердцевины // Изв. вузов. Черная металлургия. 1989. № 2. С. 115.
8. *Волхонский Л.А.* Вакуумные дуговые печи. М.: Энергоатомиздат, 1985.
9. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
10. *Углов А.А., Смуров И.Ю., Лашин А.М.* Моделирование нестационарного движения фазовых границ при воздействии потоков энергии на материалы // ТВТ. 1989. Т. 27. № 1. С. 87.
11. *Чернига Р.М., Однороженко И.Г.* Исследование процессов плавления и испарения металлов при действии серии импульсов лазерного излучения // Пром. теплотехника. 1991. Т. 13. № 4. С. 51.
12. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Математические методы теплопроводности. Киев: Вища школа, 1993.
13. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
14. *Зеликман А.Н., Коршунов Б.Г., Елютин А.В., Захаров А.М.* Ниобий и тантал. М.: Металлургия, 1990.
15. *Аникин А.Ф., Таранов М.И., Кочегура Н.М. и др.* Влияние электронно-лучевой гарнисажной плавки на структуру и свойства жаропрочного сплава ЧС70 // Проблемы спецэлектрометаллургии. 1993. № 3. С. 40.